

«Точно решаемые модели статистической механики и квантовая теория поля»

Коллектив соавторов:

С.Э. Деркачев¹, Г.А. Саркисян², В.П. Спиридонов².

¹ – Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН;

² – ЛТФ ОИЯИ

В представленный [цикл работ](#) входит 21 публикация.

Конфайнмент – это переход от кварков и глюонов, асимптотически свободно взаимодействующих в области высоких энергий, к составным объектам барионам и мезонам, сильно взаимодействующим в низкоэнергетической области. Центральная проблема теории сильных взаимодействий – объяснение этого явления. В 2008 г. Долан и Осборн показали, что в простейшей четырехмерной неабелевой $N = 1$ суперсимметричной теории поля сектор так называемых BPS-состояний полностью совпадает с сектором таких состояний в модели типа Весса-Зумино, описывающей мезонные поля без калибровочного взаимодействия, т. е. дали частичное обоснование конфайнмента. Это утверждение вытекает из равенства суперконформных индексов этих теорий, связанных электромагнитной дуальностью Зайберга, которое описывается точной формулой вычисления эллиптического бета-интеграла, математически строго доказанной В.П. Спиридоновым в 2000 г.

В статье В.П. Спиридонова 2010 г., являющейся первой работой выдвигаемого цикла, был обоснован тезис, что дуальность Зайберга лежит в основе механизма точного решения моделей статистической механики, обобщающих двумерную модель Изинга и одномерную спиновую цепочку Гейзенберга, которые являются базовыми моделями теории фазовых переходов и теории магнетизма. А именно, равенство суперконформных индексов дуальных теорий тождественно совпадает с математическим соотношением «звезда – треугольник» либо в операторной форме (через эллиптическое преобразование Фурье и соответствующую лемму Бейли, доказанной В.П. Спиридоновым), либо в функциональной форме (через равенство статистических сумм элементарных ячеек решетки в виде звезды и треугольника, использованной В.В. Бажановым и С.М. Сергеевым в исследовании наиболее общей модели типа Изинга). Таким образом, знаменитое соотношение «звезда – треугольник» связано с явлением конфайнмента в теории сильных взаимодействий.

Представленный цикл статей содержит углубленное изучение и дальнейшее развитие структурных элементов этой фундаментальной связи между решаемыми моделями статистической механики и квантовой теорией поля. А также в нем развиты различные аспекты формализма квантовых интегрируемых систем, разрабатывавшихся ранее С.Э. Деркачевым, и конформной теории поля, изучавшихся в работах Г.А. Саркисяна. Основные результаты, полученные в представленном цикле работ, перечислены ниже.

Установлена фундаментальная связь дуальности Зайберга для $N = 1$ суперсимметричных квантовых теорий поля в четырехмерном пространстве-времени с двумерными точно решаемыми моделями статистической механики. Соотношение «звезда – треугольник» совпадает с вычислением однократного эллиптического бета-интеграла и описывает равенство

суперконформных индексов простейших дуальных теорий поля, доказывающее конформность в секторе BPS состояний теории с калибровочной группой $SU(2)$ и группой ароматов $SU(6)$. Суперконформные индексы колчаных теорий поля описывают статистические суммы двумерных моделей типа Изинга со спинами в узлах, принимающими непрерывные значения.

Показано, что оператор эллиптического преобразования Фурье определяет сплетатель эквивалентных представлений алгебры Складина и эллиптического модулярного дубля, а лемма Бейли для него доказывает операторное соотношение «звезда – треугольник». Найдено наиболее общее известное решение уравнения Янга-Бакстера ранга 1 в виде интегрального оператора с эллиптическим гипергеометрическим ядром.

Найден широкий класс новых конечномерных представлений алгебры Складина и эллиптического модулярного дубля, приводящий к новым решеточным интегрируемым системам, обобщающим 8-вершинную модель Бакстера. Найдено вырождение эллиптического модулярного дубля на гиперболический уровень, которое обобщает модулярный дубль Фаддеева.

Построено соотношение «звезда – треугольник» как равенство статистических сумм для дуальных трехмерных суперсимметричных теорий, которое обобщает соотношение «звезда – треугольник» для модели Фаддеева-Волкова, а также аналогичное соотношение, основанное на суперконформных индексах дуальных трехмерных теорий.

Найдена новая интегрируемая многочастичная модель типа Руджинарса, получаемая новым вырождением многочастичной модели ван Диежена. Построено новое обобщение фундаментального интеграла Сельберга в терминах комплексных бета-интегралов в представлении Меллина-Барнса.

Показано, что b_j -символы для модулярного дубля Фаддеева и группы $SL(2, \mathbb{C})$ получаются из эллиптической гипергеометрической функции (суперконформного индекса простейшей неабелевой калибровочной теории дуальной аналогичной теории) последовательными предельными переходами. Найдены новые вырождения гиперболических интегралов (статистических сумм трехмерных суперсимметричных теорий) на комплексные и рациональные гипергеометрические функции, соответствующие значениям центрального заряда $c = 1$ и $c = 25$ двумерной конформной теории поля.

Построены парафермионные (разреженные) обобщения эллиптических гипергеометрических интегралов, т. е. суперконформных индексов теорий на четырехмерном пространстве-времени, и решения уравнения Янга-Бакстера ранга 1 в виде интегрального оператора, которые связаны со специальным линзовым пространством, а также однократного гиперболического бета-интеграла для общего линзового пространства.

Построено парафермионное обобщение гиперболической гипергеометрической функции, описывающей наиболее важную часть матрицы слияния для теории поля Лиувилля и символы Рака-Вигнера для модулярного дубля Фаддеева. Оно возникает в определенном пределе из разреженной эллиптической гипергеометрической функции, описаны симметрии и смешанные рекуррентно-разностные уравнения для него. Простейший случай соответствует суперсимметричной гипергеометрической функции, связанной с $N = 1$ суперсимметричной теорией Лиувилля и символами Рака-Вигнера для квантовой алгебры $U_q(\mathfrak{osp}(1|2))$.

Список работ цикла:

1. G. A. Sarkissian and V. P. Spiridonov, Elliptic and complex hypergeometric integrals in quantum field theory, *Phys. Part. Nucl. Lett.* 20, no. 3 (2023), 281–286.
2. E. Apresyan, G. Sarkissian and V. P. Spiridonov, A parafermionic hypergeometric function and supersymmetric $6j$ -symbols, *Nucl. Phys. B* 990 (2023), 116170, 28 pp.
3. С. Э. Деркачев, Г. А. Саркисян, В. П. Спиридонов, Эллиптическая гипергеометрическая функция и $6j$ -символы для группы $SL(2, \mathbb{C})$, *ТМФ* 213:1 (2022), 108–128.
4. G. A. Sarkissian and V. P. Spiridonov, Complex hypergeometric functions and integrable many-body problems, *J. Phys. A: Math. Theor.* 55 (2022), 385203.
5. G. Sarkissian and V. Spiridonov, Elliptic, hyperbolic, complex gamma functions and QFT in various dimensions, *Proc. of the RDP school and workshop Aspects of Symmetry, POS (Regio2021)* (2022), 037.
6. Г. А. Саркисян, В. П. Спиридонов, Рациональные гипергеометрические тождества, *Функц. Анализ и его Прил.* 55:3 (2021), 91–97.
7. Г. А. Саркисян, В. П. Спиридонов, Общий модулярный квантовый дилогарифм и бета-интегралы, *Труды МИАН* 309 (2020), 269–289.
8. G. A. Sarkissian and V. P. Spiridonov, The endless beta integrals, *SIGMA* 16 (2020), 074, 21 pp.
9. Г. А. Саркисян, В. П. Спиридонов, Модулярная группа и гиперболический бета-интеграл, *УМН* 75 (3) (2020), 187–188.
10. V. P. Spiridonov, The rarefied elliptic Bailey lemma and the Yang-Baxter equation, *J. Phys. A: Math. and Theor.* 52 (2019), 355201.
11. С. Э. Деркачев, В. П. Спиридонов, О $6j$ -символах для группы $SL(2, \mathbb{C})$, *ТМФ* 198:1 (2019), 32–53.
12. G. Sarkissian and V. P. Spiridonov, From rarefied elliptic beta integral to parafermionic star-triangle relation, *J. High Energy Physics* 10 (2018), 097.
13. V. P. Spiridonov, Rarefied elliptic hypergeometric functions, *Advances in Mathematics* 331 (2018), 830–873.
14. K. Yu. Magadov and V. P. Spiridonov, Matrix Bailey lemma and the star-triangle relation, *SIGMA* 14 (2018), 121.
15. D. Chicherin and V. P. Spiridonov, The hyperbolic modular double and Yang-Baxter equation, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 76 (2018), 95–123; arXiv:1511.00131
16. D. Chicherin, S. E. Derkachov, and V. P. Spiridonov, New elliptic solutions of the Yang-Baxter equation, *Commun. Math. Phys.* 345 (2016), 507–543.
17. D. Chicherin, S. E. Derkachov, V. P. Spiridonov, From principal series to nite-dimensional solutions of the Yang-Baxter equation, *SIGMA* 12 (2016), 028, 34 pp.

18. С. Э. Деркачев, В. П. Спиридонов, Конечномерные представления эллиптического модулярного дубля, ТМФ 183:2 (2015), 177 201.
19. I. Gahramanov and V. P. Spiridonov, The star-triangle relation and 3d superconformal indices, J. High Energy Physics 08 (2015), 040.
20. С. Э. Деркачев, В. П. Спиридонов, Уравнение Янга-Бакстера, перестановки параметров, и эллиптический бета-интеграл, УМН 68:6 (2013), 59 106.
21. V. P. Spiridonov, Elliptic beta integrals and solvable models of statistical mechanics, in: Algebraic Aspects of Darboux Transformations, Quantum Integrable Systems and Supersymmetric Quantum Mechanics, Contemp. Math. 563 (2012), 181 211; arXiv:1011.3798